Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

С1 а) Решите уравнение $\cos 2x - \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -0,25.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\ \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

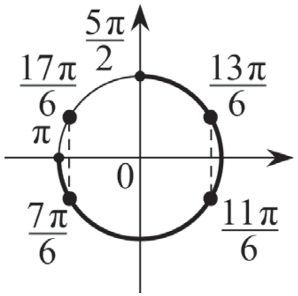
а) Запишем уравнение в виде:

$$\cos^2 x - \sin^2 x - \cos^2 x = -0,25;\ \sin^2 x = \frac{1}{4}.$$

Значит, $\sin x = \pm\frac{1}{2}$, откуда $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

б) С помощью единичной окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\ \frac{5\pi}{2}\right]$

.



Получим числа: $\frac{7\pi}{6};\ \frac{11\pi}{6};\ \frac{13\pi}{6}.$

Замечание. Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью графика, решения двойных неравенств и т.п.

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{6};\ \frac{11\pi}{6};\ \frac{13\pi}{6}.$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С2 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 1, а боковые рёбра равны 5. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 2 : 3$. Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1.

Прямая D_1E пересекает прямую AD в точке K. Плоскости ABC и BED_1 пересекаются по прямой KB.

Из точки E опустим перпендикуляр EH на прямую KB, тогда отрезок AH (проекция EH) перпендикулярен прямой KB. Угол AHE является линейным углом двугранного угла, образованного плоскостями ABC и BED_1.

Поскольку $AE : EA_1 = 2 : 3$, получаем:

$$AE = \frac{2AA_1}{5} = 2;\quad EA_1 = AA_1 - AE = 3.$$

Из подобия треугольников A_1D_1E и AKE находим:

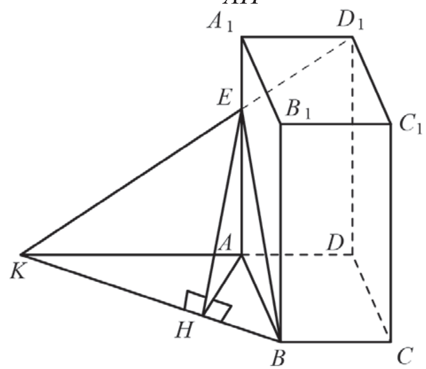
$$AK = \frac{AE}{EA_1} \cdot A_1D_1 = \frac{2}{3}.$$

В прямоугольном треугольнике AKB с прямым углом A: $AB = 1$; $AK = \frac{2}{3}$; $BK = \sqrt{AB^2 + AK^2} = \frac{\sqrt{13}}{3}$, откуда высота

$$AH = \frac{AK \cdot AB}{BK} = \frac{2\sqrt{13}}{13}.$$

Из прямоугольного треугольника AHE с прямым углом A получаем:

$$\operatorname{tg} \angle AHE = \frac{AE}{AH} = \sqrt{13}.$$



Ответ: $\operatorname{arctg}\sqrt{13}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{(x-1)^2+4(x+1)^2}{2} \le \dfrac{(3x+1)^2}{4}, \\ \dfrac{x^3+37}{(x+4)^3} \ge 1+\dfrac{1}{(x+4)^2}. \end{cases}$$

Решим первое неравенство системы.

$$2(x-1)^2+8(x+1)^2-(3x+1)^2;$$
$$2x^2-4x+2+8x^2+16x+8-9x^2-6x-1 \le 0;$$
$$x^2+6x+9 \le 0;\ \ (x+3)^2 \le 0;\ \ x=-3.$$

Второе неравенство системы можно не решать. Подставляя $x=-3$ во второе неравенство, получаем: $10 \ge 2$. Получаем верное числовое неравенство.

Ответ: -3.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах системы неравенств, но решение системы отсутствует или неверно	2
Обоснованно получен верный ответ только в одном неравенстве системы неравенств, но решение системы отсутствует или неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 В треугольнике ABC известны стороны: $AB=6$, $BC=8$, $AC=9$. Окружность, проходящая через точки A и C, пересекает прямые BA и BC соответственно в точках K и L, отличных от вершин треугольника. Отрезок KL касается окружности, вписанной в треугольник ABC. Найдите длину отрезка KL.

Обе точки K и L не могут лежать вне треугольника, поскольку в этом случае отрезок KL не может касаться вписанной окружности. Значит, по крайней мере одна из этих точек лежит на стороне треугольника.

Пусть обе точки K и L лежат на сторонах треугольника (рис. 1).

Четырёхугольник $AKLC$ — вписанный, следовательно, $\angle KAC = 180° - \angle KLC = \angle BLK$.

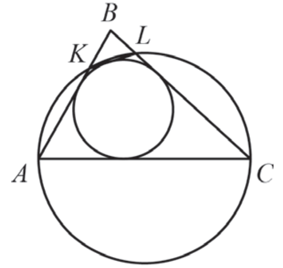


Рис. 1

Значит, треугольник ABC подобен треугольнику LBK, так как угол ABC — общий. Пусть коэффициент подобия равен k, тогда $BL=kAB$, $BK=kBC$, $KL=kAC$.

Суммы противоположных сторон описанного четырёхугольника $AKLC$ равны:

$$AK+LC=KL+AC;\ AB(1-k)+BC(1-k)=AC(1+k);\ k=\frac{AB+BC-AC}{AC+AB+BC}.$$

Подставляя известные значения сторон, находим $k=\dfrac{6+8-9}{6+8+9}=\dfrac{5}{23}$. Следовательно, $KL=\dfrac{5}{23}AC=\dfrac{45}{23}$.

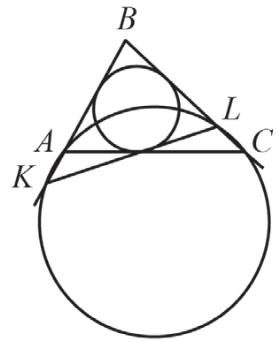


Рис. 2

Пусть точка K лежит на продолжении стороны AB (рис. 2). Углы AKL и ACL равны, поскольку опираются на одну дугу. Значит, треугольник ABC подобен треугольнику LBK, так как угол ABC — общий. Более того, они описаны около одной и той же окружности. Следовательно, коэффициент подобия равен 1, то есть треугольники LBK и ABC равны, поэтому $KL=AC=9$. Заметим, что $BK=BC>AB$ и точка K действительно лежит на продолжении стороны AB.

Если точка L лежит на продолжении стороны BC, то $BL>BC$, но аналогично предыдущему случаю получаем $BL=AB<BC$. Значит, этот случай не достигается.

Ответ: $\frac{45}{23}$, 9.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

С5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|\frac{5}{x+1}-3\right| = ax+a-2$$

на промежутке $(-1\,;\,+\infty)$ имеет более двух корней.

Рассмотрим функции $f(x)=ax+a-2$ и $g(x)=\left|\frac{5}{x+1}-3\right|$. Исследуем уравнение $f(x)=g(x)$ на промежутке $(-1\,;\,+\infty)$.

При $a\le 0$ все значения функции $f(x)$ на промежутке $(-1\,;\,+\infty)$ отрицательны, а все значения функции $g(x)$ — неотрицательны, поэтому при $a\le 0$ уравнение $f(x)=g(x)$ не имеет решений на промежутке $(-1\,;\,+\infty)$.

При $a>0$ функция $f(x)$ возрастает. Функция $g(x)$ убывает на промежутке $\left(-1;\,\frac{2}{3}\right]$, поэтому уравнение $f(x)=g(x)$ имеет не более одного решения на промежутке $\left(-1\,;\,\frac{2}{3}\right]$, причём решение будет существовать тогда и только тогда, когда $f\left(\frac{2}{3}\right)\ge g\left(\frac{2}{3}\right)$, откуда получаем $a\cdot\frac{5}{3}-2\ge 0$, то есть $a\ge\frac{6}{5}$.

На промежутке $\left(\frac{2}{3}\,;\,+\infty\right)$ уравнение $f(x)=g(x)$ принимает вид $ax+a-2=3-\frac{5}{x+1}$.

Это уравнение сводится к уравнению $ax^2+(2a-5)x+a=0$. Будем считать, что $a>0$, поскольку случай $a\le 0$ был рассмотрен ранее. Дискриминант квадратного уравнения $D=25-20a$, поэтому при $a>\frac{5}{4}$ это уравнение не имеет корней; при $a=\frac{5}{4}$ уравнение имеет единственный корень, равный 1; при $0<a<\frac{5}{4}$ уравнение имеет два корня.

Если уравнение имеет два корня x_1 и x_2, то есть $0<a<\frac{5}{4}$, то больший корень $x_2=\frac{5-2a+\sqrt{D}}{2a}>\frac{5-2a}{2a}>1>\frac{2}{3}$, поэтому он принадлежит промежутку $\left(\frac{2}{3}\,;\,+\infty\right)$.

Меньший корень x_1 принадлежит промежутку $\left(\frac{2}{3}\,;\,+\infty\right)$ тогда и только тогда, когда

$$a\left(x_1-\frac{2}{3}\right)\left(x_2-\frac{2}{3}\right)=a\left(\frac{2}{3}\right)^2+(2a-5)\cdot\frac{2}{3}+a=\frac{25a-30}{9}>0,\text{ то есть } a>\frac{6}{5}.$$

Таким образом, уравнение $\left|\frac{5}{x+1}-3\right|=ax+a-2$ имеет следующее количество корней на промежутке $(-1\,;\,+\infty)$:

- нет корней при $a \le 0$;
- один корень при $0 < a < \frac{6}{5}$ и при $a > \frac{5}{4}$;
- два корня при $a = \frac{6}{5}$ и при $a = \frac{5}{4}$;
- три корня при $\frac{6}{5} < a < \frac{5}{4}$.

Ответ: $\frac{6}{5} < a < \frac{5}{4}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

С6 За новогодним столом дети ели бутерброды и конфеты, причем каждый что-то ел, и может быть так, что кто-то ел и то, и другое. Известно, что мальчиков, евших бутерброды, было не более, чем $\frac{5}{16}$ от общего числа детей, евших бутерброды, а мальчиков, евших конфеты, было не более $\frac{2}{5}$ от общего числа детей, евших конфеты.

а) Могло ли за столом быть 13 мальчиков, если дополнительно известно, что всего за столом было 25 детей?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть за столом, если дополнительно известно, что всего за столом было 25 детей?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа детей без дополнительного условия пунктов *а* и *б*?

а) Если за столом было 5 мальчиков, евших только бутерброды, 8 мальчиков, евших только конфеты, и 12 девочек, каждая из которых ела и то, и другое, то условие задачи выполнено. Значит, в группе из 25 детей могло быть 13 мальчиков.

б) Предположим, что мальчиков было 14 или больше. Тогда девочек было 11 или меньше. Пусть число мальчиков, евших бутерброды, равно m_1. Тогда число $\frac{m_1}{m_1+11}$ не больше, чем доля мальчиков, евших бутерброды среди всех детей, евших бутерброды, а это число не больше, чем $\frac{5}{16}$, откуда $\frac{m_1}{m_1+11} \le \frac{5}{16}$ и, следовательно, $m_1 \le 5$. Пусть m_2 – число мальчиков, евших конфеты. Аналогично, $\frac{m_2}{m_2+11} \le \frac{2}{5}$, откуда, учитывая, что m_2 число целое, находим: $m_2 \le 7$.Но тогда общее число мальчиков, евших хоть что-то, не больше, чем $5+7=12$. Следовательно, по крайней мере, 2 мальчика ничего не ели, а это противоречит условию.

В предыдущем пункте было показано, что в группе из 20 учащихся могло быть 13 мальчиков. Значит, наибольшее количество мальчиков в группе — 13.

в) Предположим, что некоторый мальчик ел и конфеты, и бутерброды. Если бы вместо него было два мальчика, один из которых ел только конфеты, а другой – только бутерброды, то доля мальчиков, евших конфеты и доля мальчиков, евших бутерброды, остались бы прежними, а общая доля девочек стала бы меньше. Значит, для оценки наименьшей доли девочек можно считать, что каждый мальчик ел или только конфеты, или только бутерброды.

Пусть, как прежде, m_1 мальчиков ели бутерброды, m_2 мальчиков ели конфеты, и всего было d девочек. Оценим долю девочек. Будем считать, что каждая девочка ела и конфеты, и бутерброды, поскольку их доля в группе от этого не изменится, а доля среди евших конфеты и доля среди евших бутерброды не станут меньше.

По условию $\frac{m_1}{m_1+d} \le \frac{5}{16}$, $\frac{m_2}{m_2+d} \le \frac{2}{5}$, значит, $\frac{m_1}{d} \le \frac{5}{11}$, $\frac{m_2}{d} \le \frac{2}{3}$.

Тогда $\frac{m_1+m_2}{d} \le \frac{37}{33}$, поэтому доля девочек равна

$$\frac{d}{m_1+m_2+d} = \frac{1}{\frac{m_1+m_2}{d}+1} \ge \frac{1}{\frac{37}{33}+1} = \frac{33}{70}.$$

Осталось показать, что такая доля девочек действительно могла быть. Например, если из 70 детей 15 мальчиков ели только бутерброды, 22 мальчика ели только конфеты, и еще было 33 девочки, каждая из которых ела и то, и другое, то условие задачи выполнено, а доля девочек в точности равна $\frac{33}{70}$.

Ответ: а) да; б) 13; в) $\frac{33}{70}$.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — искомая оценка в п. *а*; — пример в п. *а*, обеспечивающий точность предыдущей оценки; — искомая оценка в п. *б*; — пример в п. *б*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $\cos 2x + 3\sin^2 x = 1,25$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\ \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

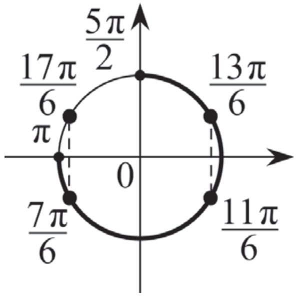
а) Запишем уравнение в виде:

$$1 - 2\sin^2 x + 3\sin^2 x = 1,25;\ \sin^2 x = \frac{1}{4}.$$

Значит, $\sin x = \pm\frac{1}{2}$, откуда $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью единичной окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\ \frac{5\pi}{2}\right]$

.



Получим числа: $\frac{7\pi}{6};\ \frac{11\pi}{6};\ \frac{13\pi}{6}$.

Замечание. Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью графика, решения двойных неравенств и т.п.

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{6};\ \frac{11\pi}{6};\ \frac{13\pi}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 1, а боковые рёбра равны 3. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 2 : 1$. Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1.

Прямая D_1E пересекает прямую AD в точке K. Плоскости ABC и BED_1 пересекаются по прямой KB.

Из точки E опустим перпендикуляр EH на прямую KB, тогда отрезок AH (проекция EH) перпендикулярен прямой KB. Угол AHE является линейным углом двугранного угла, образованного плоскостями ABC и BED_1. Поскольку $AE : EA_1 = 2 : 1$, получаем:

$$AE = \frac{2AA_1}{3} = 2;\ EA_1 = AA_1 - AE = 1.$$

Из подобия треугольников A_1D_1E и AKE находим:

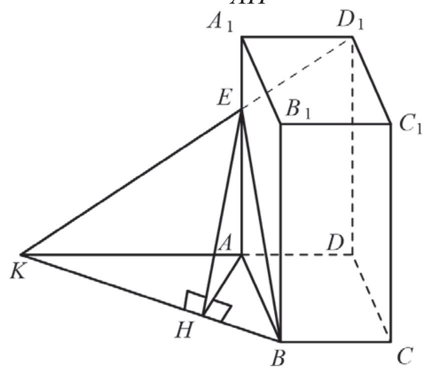
$$AK = \frac{AE}{EA_1} \cdot A_1D_1 = 2.$$

В прямоугольном треугольнике AKB с прямым углом A: $AB = 1$; $AK = 2$; $BK = \sqrt{AB^2 + AK^2} = \sqrt{5}$, откуда высота

$$AH = \frac{AK \cdot AB}{BK} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Из прямоугольного треугольника AHE с прямым углом A получаем:

$$\operatorname{tg}\angle AHE = \frac{AE}{AH} = \sqrt{5}.$$



Ответ: $\operatorname{arctg}\sqrt{5}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{(x+1)^2+4(x-1)^2}{2} \le \dfrac{(3x-1)^2}{4}, \\ \dfrac{x^3-17}{(x-4)^3} \le 1+\dfrac{1}{(x-4)^2}. \end{cases}$$

Решим первое неравенство системы.

$$2(x+1)^2+8(x-1)^2-(3x-1)^2 \le 0;$$
$$2x^2+4x+2+8x^2-16x+8-9x^2+6x-1 \le 0;$$
$$x^2-6x+9 \le 0;\ (x-3)^2 \le 0;\ \ x=3.$$

Второе неравенство системы можно не решать. Подставляя $x=3$ во второе неравенство, получаем: $-10 \le 2$. Получаем верное числовое неравенство.

Ответ: 3.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах системы неравенств, но решение системы отсутствует или неверно	2
Обоснованно получен верный ответ только в одном неравенстве системы неравенств, но решение системы отсутствует или неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 В треугольнике ABC известны стороны: $AB=14$, $BC=18$, $AC=20$. Окружность, проходящая через точки A и C, пересекает прямые BA и BC соответственно в точках K и L, отличных от вершин треугольника. Отрезок KL касается окружности, вписанной в треугольник ABC. Найдите длину отрезка KL.

Обе точки K и L не могут лежать вне треугольника, поскольку в этом случае отрезок KL не может касаться вписанной окружности. Значит, по крайней мере одна из этих точек лежит на стороне треугольника.

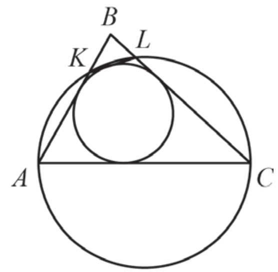


Рис. 1

Пусть обе точки K и L лежат на сторонах треугольника (рис. 1). Четырёхугольник $AKLC$ — вписанный, следовательно,

$$\angle KAC = 180° - \angle KLC = \angle BLK.$$

Значит, треугольник ABC подобен треугольнику LBK, так как угол ABC — общий. Пусть коэффициент подобия равен k, тогда $BL=kAB$, $BK=kBC$, $KL=kAC$.

Суммы противоположных сторон описанного четырёхугольника $AKLC$ равны:

$$AK+LC=KL+AC;\ AB(1-k)+BC(1-k)=AC(1+k);\ k=\frac{AB+BC-AC}{AC+AB+BC}.$$

Подставляя известные значения сторон, находим $k=\dfrac{14+18-20}{14+18+20}=\dfrac{3}{13}$.

Следовательно, $KL=\dfrac{3}{13}AC=\dfrac{60}{13}$.

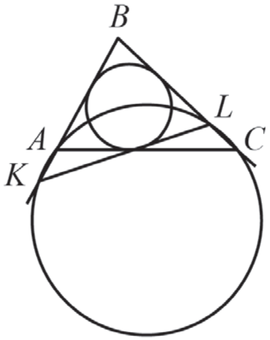


Рис. 2

Пусть точка K лежит на продолжении стороны AB (рис. 2). Углы AKL и ACL равны, поскольку опираются на одну дугу. Значит, треугольник ABC подобен треугольнику LBK, так как угол ABC — общий. Более того, они описаны около одной и той же окружности. Следовательно, коэффициент подобия равен 1, то есть треугольники LBK и ABC равны, поэтому $KL = AC = 20$. Заметим, что $BK = BC > AB$ и точка K действительно лежит на продолжении стороны AB.

Если точка L лежит на продолжении стороны BC, то $BL > BC$, но аналогично предыдущему случаю получаем $BL = AB < BC$. Значит, этот случай не достигается.

Ответ: $\frac{60}{13}$, 20.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

С5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|\frac{5}{x-1}-3\right| = ax-(a+2)$$

на промежутке $(1\,;+\infty)$ имеет более двух корней.

Рассмотрим функции $f(x) = ax - a - 2$ и $g(x) = \left|\frac{5}{x-1}-3\right|$. Исследуем уравнение $f(x) = g(x)$ на промежутке $(1\,;+\infty)$.

При $a \le 0$ все значения функции $f(x)$ на промежутке $(1\,;+\infty)$ отрицательны, а все значения функции $g(x)$ — неотрицательны, поэтому при $a \le 0$ уравнение $f(x) = g(x)$ не имеет решений на промежутке $(1\,;+\infty)$.

При $a > 0$ функция $f(x)$ возрастает. Функция $g(x)$ убывает на промежутке $\left(1\,;\frac{8}{3}\right]$, поэтому уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного решения на промежутке $\left(1\,;\frac{8}{3}\right]$, причём решение будет существовать тогда и только тогда, когда $f\left(\frac{8}{3}\right) \ge g\left(\frac{8}{3}\right)$, откуда получаем $a\cdot\frac{8}{3} - a - 2 \ge 0$, то есть $a \ge \frac{6}{5}$.

На промежутке $\left(\frac{8}{3}\,;+\infty\right)$ уравнение $f(x) = g(x)$ принимает вид $ax - a - 2 = 3 - \frac{5}{x-1}$. Это уравнение сводится к уравнению $ax^2 - (2a+5)x + a + 10 = 0$. Будем считать, что $a > 0$, поскольку случай $a \le 0$ был рассмотрен ранее. Дискриминант квадратного уравнения $D = 25 - 20a$, поэтому при $a > \frac{5}{4}$ это уравнение не имеет корней; при $a = \frac{5}{4}$ уравнение имеет единственный корень, равный 2; при $0 < a < \frac{5}{4}$ уравнение имеет два корня.

Если уравнение имеет два корня x_1 и x_2, то есть $0 < a < \frac{5}{4}$, то больший корень $x_2 = \frac{2a+5+\sqrt{D}}{2a} > \frac{2a+5}{2a} > 4 > \frac{8}{3}$, поэтому он принадлежит промежутку $\left(\frac{8}{3}\,;+\infty\right)$.

Меньший корень x_1 принадлежит промежутку $\left(\frac{8}{3}\,;+\infty\right)$ тогда и только тогда, когда

$$a\left(x_1-\frac{8}{3}\right)\left(x_2-\frac{8}{3}\right) = a\left(\frac{8}{3}\right)^2 - (2a+5)\cdot\frac{8}{3} + (a+10) = \frac{25a-30}{9} > 0, \text{ то есть } a > \frac{6}{5}.$$

Таким образом, уравнение $\left|\frac{5}{x-1}-3\right| = ax - a - 2$ имеет следующее количество корней на промежутке $(1\,;+\infty)$:

- нет корней при $a \le 0$;
- один корень при $0 < a < \frac{6}{5}$ и при $a > \frac{5}{4}$;
- два корня при $a = \frac{6}{5}$ и при $a = \frac{5}{4}$;
- три корня при $\frac{6}{5} < a < \frac{5}{4}$.

Ответ: $\frac{6}{5} < a < \frac{5}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 У каждого ученика в классе дома живет кошка или собака, а у некоторых, возможно, – и кошка, и собака. Известно, что мальчиков, имеющих собак, не более $\frac{1}{4}$ от общего числа учеников, имеющих собак, а мальчиков, имеющих кошек, не более $\frac{5}{11}$ от общего числа учеников, имеющих кошек.

а) Может ли быть в классе 11 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в классе 21 ученик?

б) Какое наибольшее количество мальчиков может быть в классе, если дополнительно известно, что всего в классе 21 ученик?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учеников без дополнительного условия пунктов *а* и *б*?

а) Если в классе 3 мальчика, у которых только собака, 8 мальчиков, у которых только кошка, и 10 девочек, у каждой из которых живет и собака, и кошка, то условие задачи выполнено. Значит, 11 мальчиков может быть.

б) Предположим, что мальчиков не менее, чем 12. Тогда девочек 9 или меньше. Пусть число мальчиков, имеющих собаку, равно m_1. Тогда доля их среди всех учеников, имеющих собаку, не меньше, чем $\frac{m_1}{m_1+9}$, и не больше, чем $\frac{1}{4}$. Получаем: $\frac{m_1}{m_1+9} \le \frac{1}{4}$, откуда $m_1 \le 3$. Если мальчиков, имеющих кошку m_2, то получаем аналогичное неравенство $\frac{m_2}{m_2+9} \le \frac{5}{11}$, откуда, учитывая, что m_2 – целое, получаем, что $m_2 \le 7$. Получается, что всего мальчиков, имеющих или кошку или собаку не более, чем $3 + 7 = 10$. А всего мальчиков не меньше 12. Значит, в классе есть мальчики, у которых нет ни кошки, ни собаки. Это противоречит условию.

В предыдущем пункте было показано, что в классе из 21 ученика может быть 11 мальчиков. Значит, наибольшее количество мальчиков — 11.

в) Предположим, что некоторый мальчик имеет и кошку, и собаку. Если бы вместо него в классе было два мальчика, один из которых имеет только собаку, а другой — только кошку, то доли мальчиков с собаками и мальчиков с кошками остались бы прежними, а общая доля девочек стала бы меньше. Значит, для оценки наименьшей доли девочек в классе можно считать, что каждый мальчик имеет только собаку или только кошку.

Пусть в классе m_1 мальчиков, имеющих собаку, m_2 мальчиков, имеющих кошку, и d девочек. Оценим долю девочек в классе. Будем считать, что у каждой девочки есть и собака, и кошка, поскольку их доля от этого не изменится, а доля девочек с собаками и доля девочек с кошками не уменьшатся.

По условию $\frac{m_1}{m_1+d} \le \frac{1}{4}$, $\frac{m_2}{m_2+d} \le \frac{5}{11}$, значит, $\frac{m_1}{d} \le \frac{1}{3}$, $\frac{m_2}{d} \le \frac{5}{6}$. Тогда $\frac{m_1+m_2}{d} \le \frac{7}{6}$, поэтому доля девочек в классе:

$$\frac{d}{m_1+m_2+d} = \frac{1}{\frac{m_1+m_2}{d}+1} \ge \frac{1}{\frac{7}{6}+1} = \frac{6}{13}.$$

Осталось привести пример, показывающий, что доля девочек $\frac{6}{13}$ действительно возможна. Например, если класс состоит из 2 мальчиков, имеющих только собаку, 5 мальчиков, имеющих только кошку и 6 девочек, каждая из которых держит и собаку и кошку, то условие задачи выполнено, а доля девочек равна $\frac{6}{13}$.

Ответ: а) да; б) 11; в) $\frac{6}{13}$.

Содержание критерия.	**Баллы**
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл.) результаты.	4.
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл.) результатов.	3.
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл.) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — искомая оценка в п. *а*; — пример в п. *а*, обеспечивающий точность предыдущей оценки; — искомая оценка в п. *б*; — пример в п. *б*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	4